▶ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ (I)$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to \ell$

Αν $\ell < 1$, τότε η σειρά (I) συγκλίνει

Αν $\ell > 1$, τότε η σειρά (I) αποκλίνει.

Παρατήρηση: Αν $\ell = 1$, το κριτήριο δεν εφαρμόζεται και η σειρά μπορεί είτε να συγκλίνει, είτε να αποκλίνει.

→ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $a_k = \frac{1}{k}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \to 1$ (αποκλίνει)

→ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $a_k = \frac{1}{k^2}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$ (συγκλίνει)

Παραδείγματα:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, $a_k = \frac{1}{k!}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1$

Άρα, η σειρά συγκλίνει.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, $a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{((k+1)!)^2 \cdot (2k)!}{(2(k+1))! \, (k!)^2} = \frac{(k+1)!(k+1)!(2k)!}{(2k+2)! \, k! \, k!} =$

$= \frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2} \to \frac{1}{4} < 1$. Άρα, η σειρά συγκλίνει.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, $a_k = \frac{2^k k!}{k^k}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{2^k k!}{k^k}} = \frac{2^{k+1}(k+1)! \cdot k^k}{2^k \, k! \, (k+1)^{k+1}} = \frac{2k^k}{(k+1)^k} =$

$= \frac{2}{\left(\frac{(k+1)^k}{k^k}\right)} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{2}{e} < 1$. Άρα, η σειρά συγκλίνει.

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k!}{k^k}$, $b_k = \frac{3^k \cdot k!}{k^k}$, Ομοίως, $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| \to \frac{3}{e} > 1$

Άρα, η σειρά αποκλίνει.

Υπενθύμιση:

Στον Απειροστικό Λογισμό I είχαμε αποδείξει ότι η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη άρα συγκλίνουσα, και ορίσαμε $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Λίγο νωρίτερα είδαμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ είναι συγκλίνουσα.

Scanned by CamScanner

Πρόταση: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Απόδειξη:

Θέτουμε $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (S_n μερικά αθροίσματα της σειράς).

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k} = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Από την ισότητα προκύπτει: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} = S_n$ (*)

Επομένως, $\lim a_n \le \lim S_n$, δηλαδή $e \le \lim S_n$.

Από την (*) για κάθε $n > k$ προκύπτει:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Κρατώντας σταθερό το k και παίρνοντας όριο για $n \to +\infty$:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} = S_k \Rightarrow e \geq S_k$$

Εφόσον η S_k είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το e, προκύπτει ότι $\lim S_n \le e$, επομένως $e = \lim S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Θεώρημα: Ο αριθμός e είναι άρρητος.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο e είναι ρητός. $e = \frac{m}{n}$ με $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\frac{m}{n} = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} + \dots\right) = n!\left(\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)\right) =$$

$$= n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} + \dots\right)$$

Έχουμε N θετικούς ακέραιους, άρα $N \in \mathbb{N}$, $0 < N = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)} + \dots\right)$

$$\le \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots\right) = -\frac{1}{12} + 1 = \frac{11}{12}.$$

Έτσι, $N \in \mathbb{N}$ με $0 < N \le \frac{11}{12} < 1$ άτοπο!

Οπότε ο e άρρητος.

Scanned by CamScanner

Θεώρημα: Κριτήριο ρίζας του Cauchy

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ώστε να υπάρχει το όριο $\ell = \lim \sqrt[k]{|a_k|}$.

α) Αν $\ell < 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

β) Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

α) $\lim \sqrt[k]{|a_k|} = \ell < 1$. Επιλέγουμε x με $\ell < x < 1$ εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = x - \ell > 0$, προκύπτει ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall k \geq n_0$ να ισχύει $\sqrt[k]{|a_k|} < x$ και άρα $|a_k| < x^k$. Η σειρά $\sum_{k=n_0}^{\infty} x^k$ συγκλίνει (γεωμετρική $0 < x < 1$), άρα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ και άρα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

β) Αν $\ell > 1$ τότε εφόσον $\lim \sqrt[k]{|a_k|} = \ell > 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall k \geq n_0$: $\sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow |a_k| > 1$ $\forall k \geq n_0 \Rightarrow a_n \not\to 0$. Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Παρατήρηση: Αν $\ell = \lim \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, το κριτήριο δεν εφαρμόζεται και η σειρά μπορεί είτε να συγκλίνει, είτε να αποκλίνει.

Παραδείγματα:

→ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \frac{1}{k}$, $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1$ αποκλίνει.

→ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k = \frac{1}{k^2}$, $\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} \to 1$ συγκλίνει.

Παράδειγμα: $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k$. Για ποια x συγκλίνει η σειρά;

Απόδειξη:

Θέτουμε $a_k = k^3 x^k$, $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^3 |x|^k} = (\sqrt[k]{k})^3 \cdot |x| \to 1 \cdot |x| = |x|$

Αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας του Cauchy

Αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας του Cauchy.

Αν $x = -1$ ή $x = 1$ η a_k δεν τείνει στο 0, άρα η σειρά αποκλίνει.

Scanned by CamScanner

Θεώρημα: Κριτήριο Leibnitz

Έστω $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, με $b_k \to 0$ $(b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots, b_k \to 0)$. Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot b_k$ συγκλίνει.

[Μάλιστα, θέτοντας $S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$ και $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}b_k$, ισχύει $|S_n - S| \leq b_{n+1}$ $\forall n$.]

Απόδειξη:

Θέτουμε $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}b_k$. Παρατηρούμε ότι η $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (αφού $S_{2n+2}-S_{2n}=b_{2n+1}-b_{2n+2}\geq 0$), ενώ η $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα αφού $S_{2n+1}-S_{2n-1}=-b_{2n}+b_{2n+1}$. Έτσι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει: $S_{2n}\leq S_{2n+2}\leq S_{2n+1}\leq S_{2n-1}$

Διότι $S_{2n+2}-S_{2n+1}=-b_{2n+2}\leq 0$. Από τις σχέσεις προκύπτει ότι $S_{2k}\leq S_{2m-1}$ $\forall k,m\in\mathbb{N}$.

Πράγματι, εάν $n>\max\{k,m\}$

$S_{2k}\leq S_{2n}\leq S_{2n-1}\leq S_{2m-1}$

Η S_{2n} είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει. Και η S_{2n-1} είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη (από το S_2). Θέτοντας $a=\lim S_{2n-1}$ έχω $a=b$, διότι $a-b=\lim S_{2n}-\lim S_{2n-1}=-b_{2n}\to 0$

Θέτοντας $S=a=b$ έχω $S_n\to S$. Τέλος, $|S_{2n-1}-S|=S_{2n-1}-S\leq S_{2n-1}-S_{2n}=b_{2n}$

$|S_{2n}-S|=S-S_{2n}\leq S_{2n+1}-S_{2n}=b_{2n+1}$

Θεώρημα: Dirichlet

Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες πραγματικών ώστε:

α) Η b_n είναι φθίνουσα με $b_n\to 0$

β) Η ακολουθία (S_n) των μερικών αθροισμάτων της a_n. $[S_n=a_1+\dots+a_n \ \forall n\in\mathbb{N}]$ είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists M>0$ ώστε $|S_n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Επομένως, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$ συγκλίνουσα.

Παραδείγματα:

α) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Η ακολουθία $b_k=\frac{1}{k}$ είναι φθίνουσα και $b_k\to 0$. Από το κριτήριο του Leibnitz η σειρά είναι συγκλίνουσα.

β) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+7}$, $b_k=\frac{1}{2k+7}$. Εφόσον b_k φθίνουσα και $b_k\to 0$, η σειρά συγκλίνει.

γ) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{2k^2+1}$, $b_k=\frac{k+1}{2k^2+1}$, $k\in\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η b_k φθίνουσα $b_k>b_{k+1}\Leftrightarrow$

$\frac{k+1}{2k^2+1}>\frac{k+2}{2(k+1)^2+1}\Leftrightarrow\frac{k+1}{2k^2+1}>\frac{k+2}{2k^2+4k+3}\Leftrightarrow(k+1)(2k^2+4k+3)>(k+2)(2k^2+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k^3+4k^2+3k+2k^2+4k+3>2k^3+k+4k^2+2\Leftrightarrow 2k^2+6k+1>0$ $\forall k$

Επομένως, ισχύει $b_k>b_{k+1}$ $\forall k$, άρα από κριτήριο Leibnitz, η σειρά συγκλίνει.

Scanned by CamScanner